VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Vrcholově magická ohodnocení grafů

Vertex magic total labeling of graphs

2010

Adam Silber

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 7. května 2010 . . . .

Rád bych zde poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce Mgr. Petru Kovářovi, Ph.D. za jeho cenné rady při konzultacích a trpělivé vedení. Bez jeho pomoci by tato práce nikdy nevznikla.
Dále bych rád poděkoval všem, kteří mě během studia podporovali, zejména mým rodičům.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá hledáním magického ohodnocení grafů, konkrétně 1-VMV ohodnocení grafů, pro které se v anglické literatuře používá název "distance magic labeling". Práce rozšiřuje známé výsledky z oblasti magických ohodnocení o nový způsob konstrukce 1-VMV ohodnocení, využitelný i pro grafy, pro které zatím nebyla konstrukce známa. Práce poukazuje na možnost praktického využití teoretických výsledků na příkladu plánování neúplných turnajů. Problém sestavení spravedlivých turnajů byl motivačním problémem některých článků, z nichž práce čerpá, a dá se přeformulovat na problém hledání 1-VMV ohodnocení pravidelného grafu.

Klíčová slova: *ohodnocení grafů, plánování turnaje, spravedlivý neúplný turnaj, vyrovnaný neúplný turnaj, 1-VMV ohodnocení, distance magic*

Abstract

This thesis deals with finding a certain magic labeling of graphs, namely 1-VMV labeling, also called distance magic labeling. Thesis extends known results in this area by a new construction of 1-VMV labeling usable for certain kind of graphs for which this labeling was not known yet. Thesis points out the possibility of practical application of theoretical results on the example of scheduling tournaments. The scheduling of a so called fair incomplete tournament is incentive problem of some articles, from which this work draws. This problem can be reformulated as finding a 1-VMV labeling of regular graph.

Keywords: *graph labelings, tournament scheduling, fair incomplete tournament, equalized incomplete tournament, 1-VMV labeling, distance magic labeling*

Seznam použitých zkratek a symbolů

$G(V,E)$	–	*Graf G s množinou vrcholů V a množinou hran E*
K_n	–	*Kompletní graf na n vrcholech*
$K_{m,n}$	–	*Kompletní bipartitní graf s partitami o m a n vrcholech*
C_n	–	*Cyklus na n vrcholech*
$\overline{G}$, G'	–	*Doplněk grafu G*
$H[\overline{K_l}]$	–	*Kompozice grafů H a $\overline{K_l}$*
$deg(x)$	–	*Stupeň vrcholu x*
$N(x)$	–	*Množina všech sousedních vrcholů vrcholu x*
$w_f(x)$	–	*Váha vrcholu x při ohodnocení f*
μ	–	*Magická konstanta*
1-VMVL	–	*1-Vertex Magic Vertex Labeling* *1-Vrcholově magické vrcholové ohodnocení*
FIT	–	*Fair Incomplete Tournament* *Spravedlivý neúplný turnaj*
EIT	–	*Equalized Incomplete Tournament* *Vyrovnaný neúplný turnaj*

Obsah

Seznam obrázků

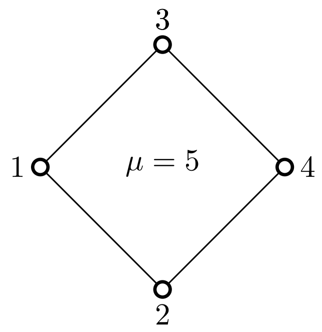
1 Úvod

Magická ohodnocení grafů patří mezi poměrně nové oblasti teorie grafů. V roce 1963 zavedl Sedláček pojem magického ohodnocení grafu, *a od té doby již vyšlo mnoho prací o různých typech magických ohodnocení [2]. Jeden z nejpřehlednějších zdrojů informací z této oblasti je Dynamic survey on graph labelings [3], kterou každoročně aktualizuje Joe Gallian.*

Zadání této bakalářské práce vznikalo v době, kdy se mé snažení zaměřovalo na hledání super vrcholově magického totálního ohodnocení lichého počtu kopií grafu K_4. Proto zadání v anglickém znění obsahuje slovo total. *V tomto směru jsme dosáhli výsledků, které dokazovaly, že naši metodu nebude možné obecně použít pro nalezení ohodnocení lichého počtu kopií grafu K_4. Společně s vedoucím mé bakalářské práce jsme se shodli, že tyto výsledky nejsou vhodné pro publikování v bakalářské práci, a obrátil jsem svou pozornost k jinému problému vrcholově magických ohodnocení grafu.*

V této práci se zaměříme na 1-vrcholově magické vrcholové ohodnocení, pro které budeme pro přehlednost používat označení 1-VMVL z anglického 1-Vertex Magic Vertex Labeling, *případně 1-VMV ohodnocení. V článku [4] je uvedena definice 1-VMV ohodnocení včetně vysvětlení čísla 1 v označení i alternativního názvu distance magic labeling.*

Mějme graf G řádu n, kde řádem rozumíme počet vrcholů grafu. 1-VMV ohodnocení je bijektivní zobrazení f přiřazující každému vrcholu grafu G číslo z intervalu $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, že existuje taková konstanta μ, že pro každý vrchol x grafu G platí $\sum_{y \in N(x)} f(y) = \mu$, kde $N(x)$ je množina všech sousedních vrcholů vrcholu x (vrcholů vzdálených od vrcholu x o 1, odtud 1-VMVL a název distance magic labeling). Pro graf ohodnocený 1-VMVL budeme používat označení 1-VMV Graf. Příklad je na obrázku 1.



Obrázek 1: 1-VMV ohodnocení grafu C_4

Pro důkladnější pochopení problematiky související s tématem práce zavedeme v kapitole 3 pojmy a definice, které nám pomohou porozumnět větám v kapitole 5, kde jsou uvedeny výsledy, kterých již bylo dosaženo. Zavedené pojmy a definice jsou z oblasti teorie grafů, a pro jejich pochopení by měla stačit znalost středoškolské matematiky.

V kapitole 5 se seznámíme s články, které tvořily jádro literatury, ze které jsem při psaní této práce čerpal. Články jsou psány v anglickém jazyce a v době psaní této bakalářské práce se některé z nich teprve připravují k vydání. I když my se budeme v kapitole 6 zabývat jen pravidelnými grafy na lichém počtu vrcholů (jelikož úplná klasifikace pravidelných grafů na sudém počtu vrcholů byla podána Frončkem, Kovářovou, Kovářem v článku [5]), známé výsledky jsou uvedeny pro grafy jak na sudém tak lichém počtu vrcholů, protože pro naši práci budeme potřebovat výsledky oba.

Články, které jsem prostudoval jako první [5],[6] a na základě jejichž obsahu jsem začal tuto práci tvořit, přistupují k tématu tak, že nejdříve představí reálný problém jehož řešení přeformulují na hledání 1-VMV ohodnocení grafu. Tento přístup sice sebou přináší jisté omezení pro strukturu grafu, který reprezentuje reálnou situaci, ale ukazuje na možné využití dosažených výsledků. Proto jsem se rozhodl přistoupit k této práci stejně a použít i stejný motivační problém.

Jedná se o problém spravedlivých neúplných turnajů, kde se hledá takový turnaj, aby pořadí hráčů podle síly soupeřů, které hráč v turnaji potká, bylo stejné jako v úplném turnaji „všichni proti všem", ale s menším počtem odehraných her v turnaji a zachováním pravidla, že všichni hráči odehrají stejný počet her. O takových turnajích pojednává kapitola 2, kde je vysvětleno, co se myslí pod pojmem „spravedlivý", a jak se dá sestavit pořadí hráčů podle „síly soupeřů", které hráč v turnaji potká.

V kapitole 4 potom objasníme souvislost mezi spravedlivým neúplným turnajem a hledáním 1-VMV ohodnocení grafu a ukážeme, že spravedlivý neúplný turnaj n hráčů existuje tehdy a jen tehdy existuje-li 1-VMV graf řádu n. Postup hledání 1-VMV grafu bude v této práci přizpůsoben tomu, aby se výsledky daly použít pro sestavení spravedlivého neúplného turnaje. Z tohoto důvodu se například budeme zabývat pouze pravidelnými grafy, jelikož v hledaném turnaji mají v rámci spravedlivosti odehrát všichni hráči stejný počet zápasů. Pro nalezení spravedlivého neúplného turnaje n hráčů, kde každý z nich odehraje r her, nám potom postačí zkonstruovat libovolný 1-VMV r-pravidelný graf na n vrcholech.

Vlastní výsledky jsou potom uvedeny v kapitole 6. Těchto výsledků bylo dosaženo vzájemným prolnutím jednotlivých myšlenek, které vznikaly při konzultacích s vedoucím mé bakalářské práce, Petrem Kovářem, a které jsem zformuloval do co nejsrozumitelnější podoby.

Tato práce si neklade za cíl nalézt řešení pro celou množinu grafů, pro které zatím 1-VMV ohodnocení není známo, ale chceme poukázat na postup jiných autorů a využít tyto znalosti k tomu, abychom rozšířili výsledky o novou konstrukci 1-VMV ohodnocení použitelnou pro některé grafy, jejichž parametry jsou pro stávající konstrukce příliš limitující.

2 Neúplné turnaje

Tato práce je inspirována reálným problémem. Jedná se o problém spravedlivých turnajů. Pokud pořádáme turnaj v jakékoliv hře, jeho "nejspravedlivější"formou je případ, kdy každý hráč (resp. tým) hraje proti všem ostatním hráčům (resp. týmům). Všichni proti všem. Všichni hrají stejný počet her a mohou změřit síly s každým účastníkem turnaje.

Nevýhoda této formy turnaje je, že je potřeba odehrát velké množství her (hrou se zde myslí vzájemné utkání dvou hráčů). Konkrétně $\binom{n}{2}$ *her. Každý z hráčů, kterých je* n*, hraje* $n-1$ *her (nehraje jen sám se sebou). Pokud tato čísla vynásobíme, dostaneme číslo, které se po vydělení* 2 *rovná počtu utkání v turnaji* $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$*. Dvěma dělíme z důvodu, že do každé hry vstupují dva hráči. Což je v převážné většině her splněno (šachy, fotbal, basketbal, tenis a další).*

Pokud chceme odehrát méně her, navrhneme omezení, které sníží počet her v turnaji. Například řekneme, že v našem turnaji bude hrát každý hráč jen q *her, kde* q *je libovolné přirozené číslo splňující následující dvě podmínky:*

- q *vyhovuje nutným podmínkám sestavení* q*-pravidelného grafu na* n *vrcholech (bude vysvětleno v kapitole věnující se pojmům a definicím),*
- $1 \leq q \leq (n-1)$*, kde* n *je počet účastníků turnaje.*

V tomto případě se nám sníží počet her v turnaji a zůstane zachován jeden aspekt spravedlivosti, že všichni hráči hrají stejný počet her. Takový turnaj potom nazveme neúplný.

Může se ale stát, že dva hráči na přibližně stejné úrovni dostanou velmi odlišně silné soupeře. Například první hráč si vylosuje q *nejslabších soupeřů, které snadno porazí a ve výsledku bude nadhodnocen nad své reálné dovednosti. Zatímco druhý hráč si vylosuje* q *nejsilnějších soupeřů, kteří ho všichni porazí a tudíž druhý hráč skončí někde na konci výsledkové listiny. Srovnání prvního a druhého hráče nyní nemá žádnou výpovědní hodnotu. Tento nedostatek půjde odstranit, dokážeme-li formalizovat pojmy nejsilnější, nejslabší, silnější než, slabší než. Dokážeme-li hráče podle síly ohodnotit a seřadit od nejslabšího k nejsilnějšímu, můžeme se již v plánování našeho turnaje snažit zajistit i spravedlivost, co se celkové síly soupeřů týče. Navrhneme například následující omezení: v našem turnaji bude hrát každý jen dvě hry, první hráč bude hrát s nejsilnějším a nejslabším, druhý hráč s druhým nejsilnějším a druhým nejslabším... Je zřejmé, že systém, kterým budeme do jednotlivých her vybírat soupeře, bude záviset jak na počtu hráčů, tak na počtu her, které plánujeme v turnaji odehrát a na systému, kterým budu ohodnocovat sílu jednotlivých hráčů.*

Pro ohodnocení síly hráčů budeme používat přirozená čísla z aritmetické posloupnosti 1 *až* n *s diferencí* 1*, kde každé číslo bude použito právě jednou. K tomu můžeme použít například výsledkovou listinu z minulého roku, kde už máme účastníky seřazeny od nejsilnějšího k nejslabšímu. Síla každého hráče je zde reprezentována pořadím z loňska. V tomto případě může být lehce zavádějící, že loňský vítěz má nejménší ohodnocení* *(protože byl první, je ohodnocen číslem 1). V našem případě, kdy ohodnocení síly hráčů v turnaji tvoří aritmetickou posloupnost, můžeme nejnižší ohodnocení přiřadit jak nejsilnějšímu tak nejslabšímu hráči. Číslo, kterým hráče ohodnotíme, může vyjadřovat jak dobrý hráč je v porovnání s ostatními hráči nebo také jak špatný hráč je. Je jedno jestli budou hrát všichni se stejně dobrými soupeři nebo stejně špatnými. Výsledky z minulého roku můžeme využít i v případě, kdy trváme na ohodnocení nejlepšího hráče nejvyšším číslem. Sílu každého hráče potom spočítáme jako počet hráčů plus jedna, mínus pořadí tohoto hráče ve výsledkové tabulce z minulého roku. Síla hráče, který v loňském roce skončil na* i *místě je* $s(i) = n + 1 - i$.

Bude-li pořadí hráčů seřazených podle součtu sil soupeřů, se kterými se střetnou, stejné jak v našem neúplném turnaji tak v úplném turnaji, kde se vzájemně utkají všichni hráči, budeme tento náš turnaj považovat za spravedlivý.

Tyto spravedlivé neúplné turnaje budeme hledat pomocí teorie grafů, matematické disciplíny, která zkoumá struktury nazvané grafy. Grafy jsou vhodné k reprezentaci turnajů, jelikož hráče můžeme zobrazit jako vrcholy a jednotlivá utkání jako hrany grafu. Vrcholům v grafu také můžeme přiřadit čísla, která budou reprezentovat sílu hráče zastoupeného daným vrcholem. Pro práci s grafy budeme potřebovat základní pojmy a definice z teorie grafů.

3 Použité pojmy a definice

V této kapitole zavedeme pojmy, věty a definice, na které se budeme v dalším textu odkazovat. Pojmy a definice jsou z oblasti teorie grafů, nejedná se však o výčet všech definic této matematické disciplíny, ale pouze o přehled těch definic, které budeme pro práci potřebovat, nebo jejichž znalost by se nám mohla hodit. Některé věty a definice byly převzaty ze skript teorie grafů, které připravuje Petr Kovář, jiné ze článku [4] a [1].

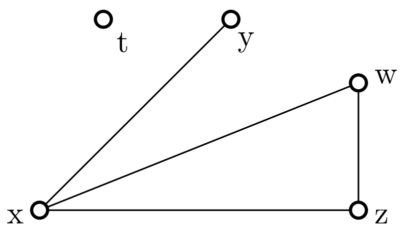
*V značení pojmů se snažím držet běžně používané symboliky, známé ze skript či odborných článků. Někdy je ale, vzhledem k potřebě rozlišovat stejné pojmy u různých grafů (například počet vrcholů nebo pravidelnost grafu), použito nestandardní značení. K většině zde použitých pojmů, které mají anglický název, jsem uvedl také český překlad. Pokud chybí, tak české pojmenování není ustálené nebo se používá název cizojazyčný. Zkratky a značení většinou vycházejí z anglické terminologie, např. označení množiny vrcholů V (*Vertices*) a hran E (*Edges*).*

Úmluva:

- *Budeme-li v této práci mluvit o čísle, myslíme tím nějaké libovolné přirozené číslo.*
- *V dalším textu budeme pod pojmem* graf *rozumět strukturu zavedenou v definici 3.1.*

Definice 3.1 *Jednoduchý graf G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je neprázdná množina* vrcholů *a E je nějaká podmnožina dvouprvkových podmnožin množiny V. Prvkům E říkáme* hrany.

Prvky množiny V budeme značit malými písmeny, např. x, prvky množiny E potom $\{x, y\}$ nebo zkráceným zápisem xy. Graf je nejčastěji zadán diagramem, kde se vrcholy obvykle znázorňují jako body a hrany jako spojnice těchto bodů.



Obrázek 2: Příklad jednoduchého grafu G s množinou vrcholů $V = \{t, w, x, y, z\}$ a množinou hran $E = \{\{x, y\}, \{x, w\}, \{x, z\}, \{w, z\}\}$

Definice 3.2 *Množinu všech vrcholů grafu G budeme značit $V(G)$ a množinu všech hran $E(G)$.*

V textu někdy pracujeme s libovolným grafem G, na jehož parametry nemáme žádné požadavky. Chceme-li u grafu specifikovat počet vrcholů $n = |V(G)|$, řekneme, že jde o graf na n vrcholech nebo o graf řádu n.

Grafy často popisují nějaké vztahy mezi objekty rálného světa, které jsou reprezentovány vrcholy grafu. Vztahy mezi těmito objekty jsou v grafu reprezentovány hranami. Při zkoumání struktury vztahů reprezentované grafem G bude jistě velmi podstatné, které vrcholy budou spojeny hranou a které ne.

Definice 3.3 *Dva vrcholy $x, y \in V(G)$ jsou* sousední, *když existuje hrana $xy \in E(G)$.*

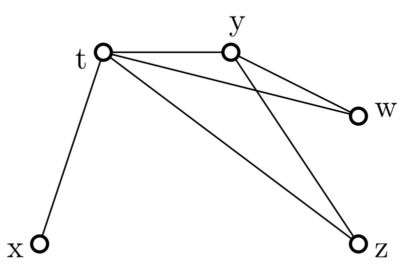
Na obrázku 2 jsou například vrcholy x a z sousední, zatímco vrcholy w a y sousední nejsou. Sousedním vrcholům se také říká závislé a nesousedním nezávislé vrcholy.

Definice 3.4 *Množina sousedních vrcholů vrcholu x je tvořena všemi vrcholy y, pro které platí $xy \in E$. Množinu všech sousedních vrcholů vrcholu x budeme značit $N(x)$.*

Množina sousedních vrcholů vrcholu x z obrázku 2 je $N(x) = \{w, y, z\}$.

Definice 3.5 *Doplněk grafu $G(V, E)$ je graf $\overline{G}(V, F)$, kde $F = \binom{V}{2} \backslash E$ a $V(G) = V(\overline{G})$. $\binom{V}{2}$ značí všechny dvouprvkové podmnožiny množiny $V(G)$.*

Doplněk grafu G tedy obsahuje všechny vrcholy grafu G, a každý vrchol $x \in V(\overline{G})$ je sousední s právě těmi vrcholy, s kterými v grafu G nesousedí.



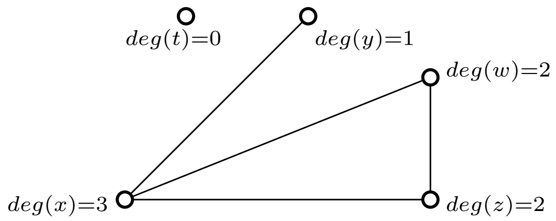
Obrázek 3: Doplněk grafu G z obrázku 2

Definice 3.6 *Řekneme, že hrana $e = \{x, y\} \in E(G)$ je* incidentní *s vrcholem x právě tehdy, když $x \in e$. Vrcholy x, y nazveme koncové vrcholy hrany e.*

Poznámka 3.1 V celé práci budeme pracovat s jednoduchými neorientovanými grafy bez smyček. To znamená, že dva vrcholy $x, y \in V(G)$ mohou být spojeny jen jednou hranou, nerozlišujeme zda hrana xy vede z vrcholu x do vrcholu y nebo naopak a není přípustné, aby byl vrchol spojen hranou sám se sebou (hrana grafu je jednoznačně určena dvěma různými vrcholy), viz definice 3.1.

Definice 3.7 Stupeň vrcholu *x je roven počtu všech hran, které jsou s vrcholem x incidentní. Stupeň vrcholu x značíme $deg(x)$.*

Stupeň vrcholu x současně dává informaci s kolika vrcholy je vrchol x sousední. Je tedy zřejmé, že stupeň žádného vrcholu nemůže být větší než počet vrcholů v grafu bez vrcholu samotného, jelikož sám se sebou nemůže být sousední. Nejvyšší možný stupeň, kterého může vrcholu $x \in V(G)$ nabývat, je $deg(x) = |V(G)| - 1$.



Obrázek 4: Stupně vrcholů grafu G

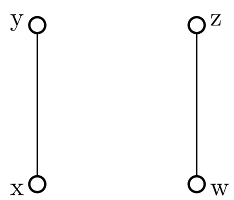
Věta 3.1 (Princip sudosti) *Mějme libovolný graf G s vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$, kde $n \geq 1$. Počet hran grafu G označíme $h(G) = |E(G)|$. Potom platí*

$$\sum_{v_i \in V(G)} deg(v_i) = 2\, h(G).$$

Důkaz věty 3.1 je možné najít v každých skriptech teorie grafů. Všimneme-li si, že každá hrana zvyšuje stupeň vrcholu o 1 právě u dvou vrcholů, zjistíme, že v každém grafu je počet hran roven polovině součtu stupňů vrcholů všech vrcholů grafu.

Definice 3.8 Regulární *nebo také* pravidelný *graf je graf, který má všechny vrcholy stejného stupně.*

Často se před slovo pravidelný přidává číslo určující stupeň vrcholů v pravidelném grafu. Např. 1-pravidelný graf má všechny vrcholy stupně 1.

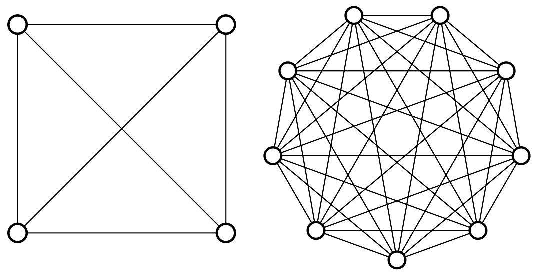


Obrázek 5: Příklad 1-pravidelného grafu na 4 vrcholech

Poznámka 3.2 Věta 3.1 nám říká, že v grafu nemůže být lichý počet vrcholů lichého stupně (počet hran musí být celé číslo). Proto, volíme-li nějaké číslo q pro q-pravidelný graf na lichém počtu vrcholů, musí být q sudé, aby takový graf existoval.

Pro významné typy grafů se používá vlastní název a označení. Název většinou plyne ze symetrie nebo vlastností grafu, podle kterých je lze společně se zadaným počtem vrcholů jednoznačně sestavit.

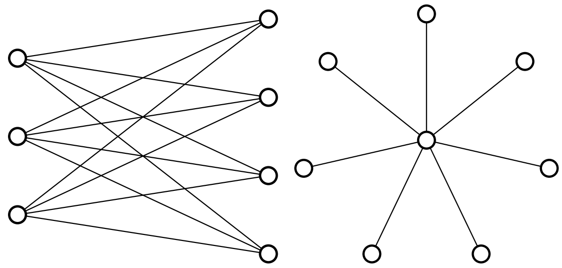
Definice 3.9 *Graf, jehož každé dva vrcholy jsou navzájem sousední, nazýváme* Kompletní graf *a značíme K_n, kde n je počet vrcholů kompletního grafu.*



Obrázek 6: Kompletní grafy K_4 a K_9

Kompletní graf, nazývaný také úplný graf, má úplnou množinu hran $E(K_n) = \binom{V(K_n)}{2}$. Počet hran v kompletním grafu na n vrcholech je tedy $\frac{n\,(n-1)}{2}$. Doplněk kompletního grafu je množina nezávislých vrcholů, jelikož podle definice 3.5 je $E(K_n) = \emptyset$. Každý kompletní graf má všechny vrcholy nejvyššího možného stupně, je $(n-1)$-pravidelný.

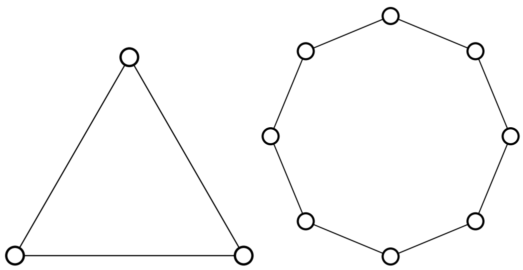
Definice 3.10 *Graf, jehož množina vrcholů je sjednocením dvou neprázdných disjunktních množin U a W a množina hran je $E = \{\forall u \in U \wedge \forall w \in W : uv\}$, se nazývá* kompletní bipartitní graf *s partitami U a W, který značíme $K_{m,n}$, kde $m = |U|$ a $n = |W|$.*



Obrázek 7: Kompletní bipartitní graf $K_{3,4}$ a $K_{1,7}$

V kompletním bipartitním grafu lze rozdělit množinu vrcholů na dvě části (partity) tak, že z každého vrcholu jedné partity vede hrana do všech vrcholů druhé partity a všechny vrcholy v rámci jedné partity jsou navzájem nezávislé. Bipartitní graf $B(V,E)$ je graf s množinou vrcholů $V(B) = V(K_{m,n})$, jehož množina hran $E(B)$ je podmnožinou množiny hran kompletního bipartitního grafu $E(K_{m,n})$. Graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje cykly liché délky. Kompletnímu bipartitnímu grafu $K_{1,n}$ se také říká hvězda.

Definice 3.11 *Graf s množinou vrcholů $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, kde $n \geq 3$, a množinou hran $E = \{x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$, se nazývá* cyklus *a značíme jej C_n.*



Obrázek 8: Cykly C_3 a C_8

Cyklus je 2-pravidelný graf se stejným počtem vrcholů a hran $|E(C_n)| = n$. O počtu vrcholů n grafu C_n se často hovoří jako o délce cyklu. V tomto smyslu jsou na obrázku 8 cykly délky 3 a 8.

Nyní zavedeme pojmy a definice související s ohodnocením grafu.

Definice 3.12 *[1] Ohodnocení grafu je funkce f, která vrcholům nebo hranám v grafu G přiřadí čísla, nejčastěji z množiny přirozených čísel.*

Definice 3.13 *Hodnota vrcholu x nebo hrany xy grafu G je číslo přiřazené v ohodnocení f vrcholu x nebo hraně xy.*

Definice 3.14 *[1] Jestliže jsou v ohodnocení f přiřazeny hodnoty pouze vrcholům grafu $G(V,E)$, hovoříme o* vrcholovém *ohodnocení grafu, jsou-li hodnoty přiřazeny pouze hranám grafu, hovoříme o* hranovém *ohodnocení grafu, v případě kdy jsou hodnoty přiřazeny jak vrcholům tak hranám, hovoříme o* totálním *ohodnocení grafu.*

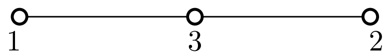
V této práci budeme používat jen vrcholové ohodnocení grafu, jelikož hodnoty budeme přiřazovat pouze vrcholům, a to podle síly hráče, kterého reprezentují, vzájemným zápasům reprezentovaných hranami nikoliv. V našem případě bude vrcholové ohodnocení *grafu bijektivní zobrazení f, které každému vrcholu x grafu $G(V,E)$ přiřadí číslo $f(x) = a$, kde $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $n = |V(G)|$.*

Definice 3.15 *[4]* 1-Vrcholově magické vrcholové ohodnocení *grafu $G(V, E)$ je bijektivní zobrazení $f : V(G) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že pro každý vrchol $x \in V(G)$ platí*

$$\sum_{y \in N(x)} f(y) = \mu,$$

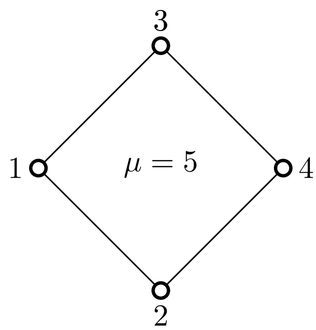
kde μ je konstanata z množiny přirozených čísel.

1-Vrcholově magické vrcholové ohodnocení grafu G je vrcholové ohodnocení přiřazující každému vrcholu grafu G číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, aby součet hodnot sousedních vrcholů (vrcholů vzdálených od vrcholu o 1) byl stejný (magický) pro všechny vrcholy grafu G. Toto ohodnocení značíme 1-VMVL(1-Vertex Magic Vertex Labeling)*, v anglické literatuře se však častěji používá název* distance magic labeling *[4].*



Obrázek 9: Příklad 1-VMV ohodnocení nepravidelného grafu

Definice 3.16 *[1], [4]* Váha vrcholu *x grafu G při* 1-VMV *ohodnocení f, značíme $w_f(x)$, se rovná: $w_f(x) = \sum_{y \in N(x)} f(y) = \mu$, kde μ je* magická konstanta *1-VMV grafu G.*



Obrázek 10: 1-VMV Graf C_4 s magickou konstantou $\mu = 5$

4 Turnaje z pohledu teorie grafů

Jak jsme již dříve zmínili, na problém hledání spravedlivých neúplných turnajů je možné se podívat z pohledu teorie grafů. Za zakladatele této poměrně mladé matematické disciplíny se považuje Leonhard Euler, který roku 1736 řešil problém sedmi mostů města Královce.[1]

Turnaj si představíme jako graf, a to ve smyslu, že každého hráče (resp. tým) budeme považovat za vrchol v grafu, a každá hrana v grafu bude zase reprezentovat vzájemné utkání dvou hráčů (resp. týmů) zastoupených koncovými vrcholy hrany. Síla jednotlivých hráčů bude v grafu zastoupena pomocí ohodnocení vrcholů číslem, udávající sílu hráče reprezentovaného daným vrcholem.

Předpokládejme, že pro turnaj, který se chystáme pořádat, známe zatím pouze počet účastníků a jejich sílu (například z pořadí výsledkové listiny minulého roku). Našim úkolem bude rozvrhnout jednotlivá utkání, kdo s kým bude hrát tak, aby byl turnaj spravedlivý.

4.1 Spravedlivé neúplné turnaje

V kapitole 2 jsme zmínili, že za spravedlivý se považuje turnaj všichni proti všem, jehož nevýhodou je velký počet zápasů. Graf K, který bude reprezentovat takovýto turnaj s n hráči, bude mít n vrcholů, a protože každý hráč hraje se všemi účastníky turnaje kromě sebe samotného, bude v grafu K rovněž každý vrchol spojen hranou se všemi ostatními vrcholy. Takový graf odpovídá podle definice 3.9 kompletnímu grafu K_n. Turnaj reprezentován kompletním grafem považujeme za spravedlivý a nazýváme ho úplný turnaj. Chceme-li zachovat spravedlivost i pro jiné turnaje, než ty, které jsou reprezentovány kompletními grafy, musíme zohlednit dvě vlastnosti úplného turnaje.

- *Všichni hráči hrají stejný počet utkání.*
- *Pořadí hráčů seřazených podle součtu sil soupeřů, se kterými se střetnou, je shodné s úplným turnajem.*

První vlastnost nám říká, že graf, který bude reprezentovat spravedlivý turnaj, bude pravidelný. Pro pochopení druhé podmínky se podíváme na obtížnost podle síly soupeřů v úplném turnaji. Podle výsledků z minulého roku můžeme seřadit hráče od prvního – nejsilnějšího až po posledního – nejslabšího a přiřadit každému číslo (ohodnotit je) reprezentující jeho sílu. Potom za předpokladu, že máme n hráčů, nejsilnější hráč bude ohodnocen číslem n, druhý nejsilnější číslem $(n-1)$ atd., až nejslabší hráč bude ohodnocen číslem 1.

[1] *Sedm mostů města Královce (příklad ze skript teorie grafů)* Městem Královec (nyní Kaliningrad na území Ruska) teče řeka Pregola, která vytváří dva ostrovy. V 18. století byly ostrovy spojeny s oběma břehy i navzájem celkem sedmi mosty. Otázka zní, zda je možné všechny mosty přejít tak, aby ten, kdo se o to pokouší, vstoupil na každý most pouze jednou.

Obecně můžeme definovat sílu i-tého hráče jako $s_n(i) = n + 1 - i$, kde i je pořadí daného hráče. Součet síly všech soupeřů, které hráč i v úplném turnaji potká je dán vztahem $S_{n,n-1}(i) = \frac{(n+1)\cdot n}{2} - s_n(i) = \frac{(n+1)(n-2)}{2} + i$. Spočítáme-li tento součet pro všechny účastníky úplného turnaje, dostaneme takovou aritmetickou posloupnost s diferencí 1, že s rostoucí silou hráče klesá síla soupeřů, se kterými bude hráč hrát [5].

Požadujeme-li, aby pořadí hráčů seřazených podle součtu sil soupeřů, se kterými se střetnou, bylo shodné s úplným turnajem, myslíme tím, že chceme, aby rovněž součty síly všech soupeřů, které hráči v turnaji potkají, vytvořily aritmetickou posloupnost s diferencí 1, a sice takovou, že s rostoucí silou hráče klesá síla soupeřů, se kterými bude hráč hrát. Pokud budeme pořádat spravedlivý neúplný turnaj n hráčů, kde každý odehraje q her, bude síla všech soupeřů hráče i dána vztahem $S_{n,q}(i) = \frac{(n+1)(n-2)}{2} + i - m$, kde m je nějaké přirozené číslo (jednoznačně určené dvojicí parametrů n a q).

Definice 4.1 *[5]* Spravdlivý neúplný turnaj *n hráčů, kde každý hráč odehraje právě q her a součet síly všech soupeřů, se kterými se hráč i v turnaji utká, je $S_{n,q}(i) = \frac{(n+1)(n-2)}{2} + i - m$, kde m je konstanta, budeme značit FIT(n, q).*

Součet síly hráčů, s kterými hráč nehrál, je roven m, pro všechny hráče FIT(n, q). Označení FIT vychází z anglického názvu fair incomplete tournament.

4.2 Vyrovnané neúplné turnaje

Na začátku jsme si řekli, že za spravedlivý budeme považovat turnaj všichni proti všem, a toto nebudeme nijak zpochybňovat. Přesto by někdo mohl namítnout, že spravedlivé by bylo, kdyby všichni hráči měli stejný součet síly oponentů. Pokud se budeme dívat na spravedlivost z tohoto pohledu, potom náš turnaj budeme sestavovat tak, aby byl součet síly oponentů pro všechny hráče roven nějaké konstantě m. Takový turnaj v dalším textu nenazveme spravedlivý, ale vyrovnaný, protože síla protivníků je zde pro všechny hráče vyrovnaná.

Definice 4.2 *[5]* Vyrovnaný neúplný turnaj *n hráčů, kde každý hráč odehraje právě r her a součet síly všech soupeřů, se kterými se hráč i v turnaji utká, je $T_{n,r}(i) = m$, pro všechna i, budeme značit EIT(n, r).*

Označení EIT vychází z anglického názvu equalized incomplete tournament. *Pojmy* spravedlivý neúplný turnaj *a* vyrovnaný neúplný turnaj *a jejich značení, které zde používáme, jsou zavedeny v článku [5].*

Lze si všimnout, že hry, které jsme vynechali z úplného turnaje n hráčů tak, abychom dostali spravedlivý neúplný turnaj FIT(n, q), tvoří vyrovnaný neúplný turnaj EIT(n, n-1-q). Graf, který bude reprezentovat EIT(n, n-1-q), označme G a graf, který bude reprezentovat FIT(n, q), označme H. Potom graf G společně s ohodnocením vrcholů podle síly hráčů je doplněk grafu H s ohodnocením vrcholů podle síly hráčů a jejich sjednocení tvoří kompletní graf reprezentující úplný turnaj n hráčů. Platí tedy, že odebráním FIT(n, q) z úplného turnaje n hráčů vznikne EIT(n, n-1-q) a naopak.

Věta 4.1 *FIT(n, n-1-r) existuje tehdy a jen tehdy, pokud existuje EIT(n, r).*

Jelikož každý hráč odehraje v EIT(n, r) právě r utkání, graf G, který bude vyrovnaný neúplný turnaj reprezentovat, bude r-pravidelný řádu n. V definici vyrovnaného neúplného turnaje se požaduje, aby součet síly všech r soupeřů, se kterými se hráč utká, byl $T_{n,r}(i) = m$ pro všechny hráče. V grafu G tedy budou vrcholy ohodnoceny čísly $1, 2, \ldots, n$ tak, že součet hodnot všech sousedních vrcholů bude roven m pro všechny vrcholy v grafu, což nápadně připomíná definici 3.15, popisující 1-VMV ohodnocení. Tato podobnost umožnuje hledání EIT(n, r) převést na hledání 1-VMV ohodnocení r-pravidelného grafu na n vrcholech.

Věta 4.2 *Najít vyrovnaný neúplný turnaj n hráčů, z nichž každý odehraje r zápasů, znamená nalézt r-pravidelný 1-VMV graf na n vrcholech.*

Tato bakalářská práce se zabývá hledáním 1-VMV ohodnocení pravidelných grafů a tudíž výsledky, kterých zde bude dosaženo, je možné použít pro sestavení vyrovnaného neúplného turnaje. Spravedlivý neúplný turnaj potom získáme jako doplněk 1-VMV grafu.

5 Známé výsledky

V této kapitole se seznámíme s dosavadními výsledky, které se týkají neúplných turnajů a 1-VMV ohodnocení grafů. Z těchto výsledků jsem čerpal při psaní práce a věty citované v této kopitole jsou využity při hledání nové konstrukce 1-VMV ohodnocení grafu. Základní poznatky o 1-VMV ohodnocení jsou uvedeny v podkapitole 5.1 a byly čerpány převážně z článku [4] autorů Miller, Rodger a Simanjuntak. Výsledky z článků, které vycházejí z problému spravedlivých neúplných turnajů [5], [6], využívají konstrukce 1-VMV ohodnocení založené na rozkladu množiny hodnot vrcholů na třídy se stejným součtem. Tyto konstrukce jsou závislé na počtu vrcholů, a proto jsou výsledky z oblasti neúplných turnajů rozděleny do dvou podkapitol 5.2 a 5.3 podle počtu hráčů účastnících se turnaje.

5.1 1-VMV ohodnocení grafů

Nyní uvedeme některá obecně platná tvrzení pro 1-VMV ohodnocení, také se podíváme na případ, kdy 1-VMV ohodnocení neexistuje. Zde citované věty odpovídají značením pojmů kapitole 3.

Následující lemma dává nutnou podmínku pro existenci 1-VMV ohodnocení grafu.

Lemma 1 *[4] Nutná podmínka pro existenxi 1-VMV ohodnocení f grafu G je $n\mu = \sum_{x\in V(G)} deg(x)f(x)$, kde $n = |V(G)|$ a μ je magická konstanta.*

Na jedné straně rovnice je váha všech vrcholů grafu, na druhé je pak součet hodnot vrcholů, kde se každá hodnota přičte právě tolikrát, jaký je stupeň příslušného vrcholu. Z toho můžeme spočítat magickou konstantu zadaného 1-VMV pravidelného grafu.

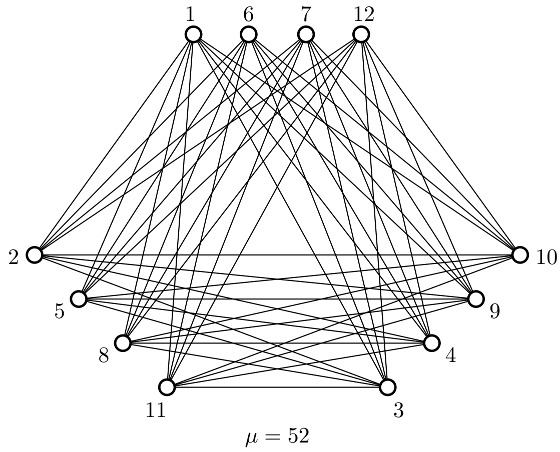
Věta 5.1 *[10] Nechť G je 1-VMV r-pravidelný graf na n vrcholech. A nechť f je nějaké 1-VMV ohodnocení grafu G s magickou konstantou μ. Potom $\mu = \frac{r(n+1)}{2}$.*

Důkaz. *Podle Lemmatu 1 je $n\mu = \sum_{x\in V(G)} deg(x)f(x) = r\sum_{i=1}^{n} i = \frac{rn(n+1)}{2}$. Po vydělení počtem vrcholů n dostáváme $\mu = \frac{r(n+1)}{2}$.* ∎

Z věty 5.1 plyne, že magická konstanta je pro 1-VMV ohodnocení pravidelných grafů dána jednoznačně nezávisle na ohodnocení f. Této vlastnosti později využijeme při hledání 1-VMV ohodnocení grafu zadaného parametry r a n, určující pravidelnost a počet vrcholů.

V článku [4] je také ukázána konstrukce 1-VMV ohodnocení pro kompletní bipartitní a pravidelné symetrické multipartitní grafy. Kompletní symetrický multipartitní graf je *takový graf, který obsahuje p partit, kde $p > 1$, a každá partita obsahuje n vrcholů. Každý vrchol grafu je sousední se všemi vrcholy r partit, kde $r \leq p-1$, a s žádným vrcholem své partity. Takovýto graf můžeme dostat tak, že vezmeme r-pravidelný graf na p vrcholech, kde každou dvojici sousedních vrcholů nahradíme kompletním bipartitním grafem $K_{n,n}$. Z tohoto přístupu se dá dokázat pomocí věty 3.1 platnost $pr \equiv 0 \pmod 2$. Mějme daný kompletní symetrický multipartitní graf s p partitami, kde každá obsahuje n vrcholů, potom tento graf budeme značit $M_{n,p}$ kde $n > 1$ a $p > 1$.*

Věta 5.2 *[4] Multipartitní graf $M_{n,p}$ má 1-VMV ohodnocení tehdy a jen tehdy, je-li n sudé nebo jsou obě čísla p a n lichá.*



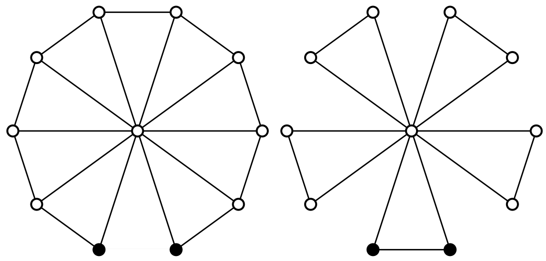
Obrázek 11: Příklad 1-VMV ohodnocení multipartitního grafu $M_{4,3}$

Nyní se podíváme na podmínky zaručující, že 1-VMV ohodnocení pro daný graf neexistuje.

Podle definice 3.15 je 1-VMV ohodnocení bijektivní zobrazení, a tak se nemůže stát, že by dva různé vrcholy měly stejnou hodnotu. Váha vrcholu je naopak pro všechny vrcholy v grafu stejná. Jsou-li v grafu takové dva vrcholy, že obě jejich množiny sousedních vrcholů se až na jeden vrchol shodují, nelze pro takový graf 1-VMV ohodnocení najít.

Lemma 2 *[4] Pokud graf G obsahuje dva vrcholy u, v takové, že $|N(u) \bigcap N(v)| = deg(u) - 1 = deg(v) - 1$, potom graf G nemá 1-VMV ohodnocení.*

Lemma 2 udává případ, kdy není možné 1-VMV ohodnocení nalézt. Struktura popsaná v tomto lemmatu se nachází v některých známých třídách grafů, jako jsou například vějíře *nebo* přátelské *(tzv. friendship)* grafy *uvedeny v obrázku 12.*



Obrázek 12: Příklady grafů, pro které 1-VMV ohodnocení neexistuje

Věta 5.3 *[4] Žádný r-pravidelný graf, kde r je liché, nemá 1-VMV ohodnocení.*

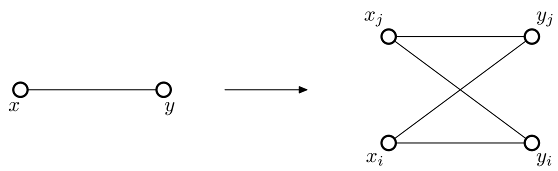
Důkaz věty 5.3 ve článku [4] využívá Lemma 1. Snadno zjistíme, že pro r liché existují r-pravidelné grafy jen na sudém počtu vrcholů, viz věta 3.1. Pro takovouto volbu parametrů nevyjde, podle věty 5.1, magická konstanta jako celé číslo, což není možné, neboť hodnoty vrcholů jsou pouze celočíselné.

5.2 EIT se sudým počtem hráčů

Nyní se zaměříme na turnaje se sudým počtem hráčů, tudíž grafy reprezentující tyto turnaje budou obsahovat sudý počet vrcholů. Fronček, Kovář a Kovářová podali v článku [5] úplnou klasifikaci r-pravidelných grafů na sudém počtu vrcholů vzhledem k existenci 1-VMV ohodnocení.

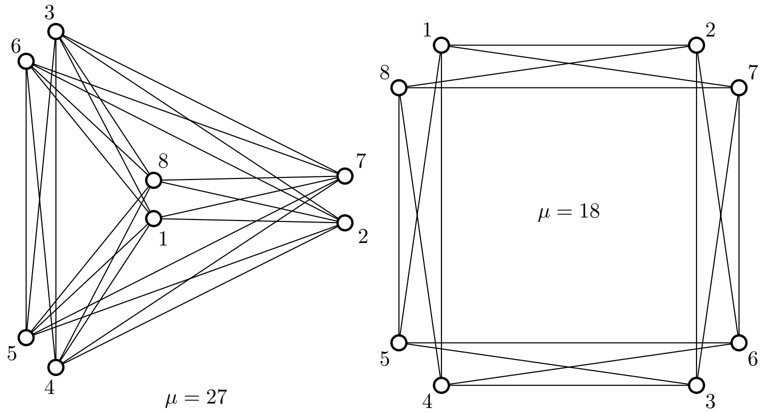
Věta 5.4 *[5] Pro r-pravidelné grafy řádu n, kde n je sudé, existuje 1-VMV ohodnocení tehdy a jen tehdy, pokud $2 \leq r \leq n-2, r \equiv 0 \pmod 2$ a buď $n \equiv 0 \pmod 4$ nebo $r \equiv 0 \pmod 4$.*

Věta 5.4 nám pro graf zadaný parametry n, r zaručí nebo vyvrátí existenci 1-VMV ohodnocení. Důkaz věty 5.4 v článku [5] dává návod, jak toto ohodnocení, pokud existuje, zkonstruovat. Nástin konstrukce 1-VMV ohodnocení pro pravidelné grafy na sudém počtu vrcholů vypadá takto. Nejdříve se najde libovolný $\frac{r}{2}$-pravidelný graf na $\frac{n}{2}$ vrcholech. Ten existuje právě tehdy, jsou-li splněny podmínky věty 5.4. Každý vrchol x tohoto grafu se nahradí dvojicí vrcholů x_i, x_j, a každá hrana xy se nahradí hranami $x_iy_i, x_iy_j, x_jy_i, x_jy_j$. Po této úpravě již dostaneme r-pravidelný graf na n vrcholech.



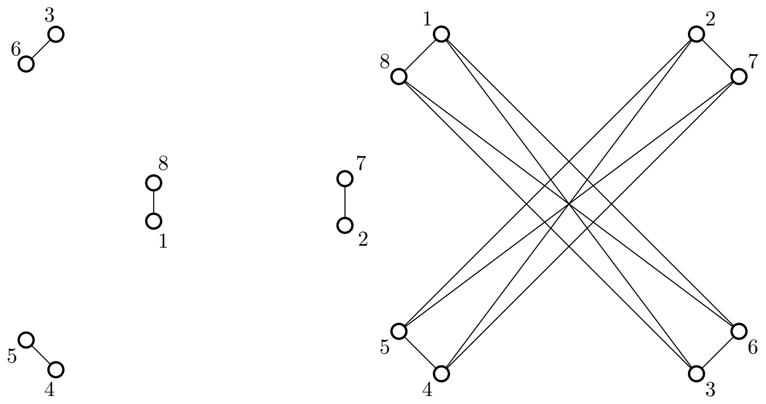
Obrázek 13: Ukázka konstrukce 1-VMVL pro grafy na sudém počtu vrcholů.

Vrcholy nyní ohodnotíme tak, aby součet hodnot dvojice vrcholů x_i, x_j byl stejný pro všechny dvojice v grafu, a žádné dva vrcholy neměly stejnou hodnotu. Ohodnocení f vrcholů x_i, x_j bude tedy $f(x_i) = i$, kde $i \in \{1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\}$ a $f(x_j) = j = n + 1 - i$. Součet hodnot vrcholů je nyní v každé dvojici $n + 1$. Vzhledem k tomu, že původní graf před zdvojením vrcholů byl $\frac{r}{2}$-pravidelný, je v ohodnoceném grafu každý vrchol sousední právě s $\frac{r}{2}$ dvojicemi vrcholů. Váha každého vrcholu je tedy $\frac{r(n+1)}{2}$.



Obrázek 14: 1-VMV ohodnocení grafů reprezentující EIT(8, 6) a EIT(8, 4)

V kapitole 4 jsme ukázali souvislost mezi FIT a EIT, a řekli jsme si, že pokud najdeme 1-VMV graf G reprezentující EIT(n, r), tak graf reprezentující FIT(n, n-1-r) bude doplněk grafu G.



Obrázek 15: Doplněk grafů z obrázku 14 reprezentující FIT(8, 1) a FIT(8, 3)

Jelikož FIT(n, n-1-r) existuje tehdy a jen tehdy, pokud existuje EIT(n, r), dají se z věty 5.4 získat podmínky pro existenci FIT(n, n-1-r).

Poznámka 5.1 [5] Pro n sudé existuje FIT(n, q) tehdy a jen tehdy, pokud $1 \leq q \leq n-1, q \equiv 1 \pmod 2$ a buď $n \equiv 0 \pmod 4$ nebo $n \equiv q + 1 \equiv 2 \pmod 4$.

5.3 EIT s lichým počtem hráčů

V této podkapitole se podíváme na turnaje s lichým počtem hráčů. Pro pravidelné grafy na lichém počtu vrcholů, které tyto turnaje reprezentují, není známa úplná klasifikace vzhledem k existenci 1-VMV ohodnocení. Jsou však známy některé nutné a některé postačující podmínky, kdy lze 1-VMV ohodnocení grafu nalézt. Nutné podmínky pro existenci 1-VMV ohodnocení jsme uvedli v podkapitole 5.1. Nyní se zaměříme na postačující podmínky a ukážeme si výsledky z článku [8], ve kterém je možné nalézt konstrukci 1-VMV ohodnocení pro některé grafy lichých řádů. Tato konstrukce je rovněž založena na rozkladu množiny hodnot vrcholů na třídy se stejným součtem.

Mějme libovolný graf H s vrcholy $x_1, x_2, \ldots x_n$ *a kompletní graf K s l vrcholy. Potom graf, který budeme značit* $H[\overline{K_l}]$ *vznikne z grafu H nahrazením každého jeho vrcholu* x_i *množinou* X_i *vrcholů grafu* $\overline{K_l}$, *a každou hranu* $x_i x_j$ *hranami kompletního bipartitního grafu* $K_{l,l}$ *s partitami* X_i *a* X_j. *Graf* $H[\overline{K_l}]$ *se nazývá* lexikografický produkt *nebo také* kompozice *grafů H a* $\overline{K_l}$. *V některé literatuře se hovoří o* wreath product (věncový součin)*, a značí se* $H \bullet \overline{K_l}$ *případně* $H \times \overline{K_l}$. *Miller, Rodger a Simanjuntak v článku [4] dokázali, že pokud je H libovolný pravidelný graf, potom* $H[\overline{K_l}]$, *kde l je sudé, má 1-VMV ohodnocení. Chceme-li ovšem získat graf na lichém počtu vrcholů, musíme provést kompozici grafů lichých řádů. Frонček, Kovář a Kovářová v článku [8] dokázali existenci 1-VMV ohodnocení pro graf* $H[\overline{K_l}]$, *kde l je liché a H je libovolný pravidelný graf na lichém počtu vrcholů.*

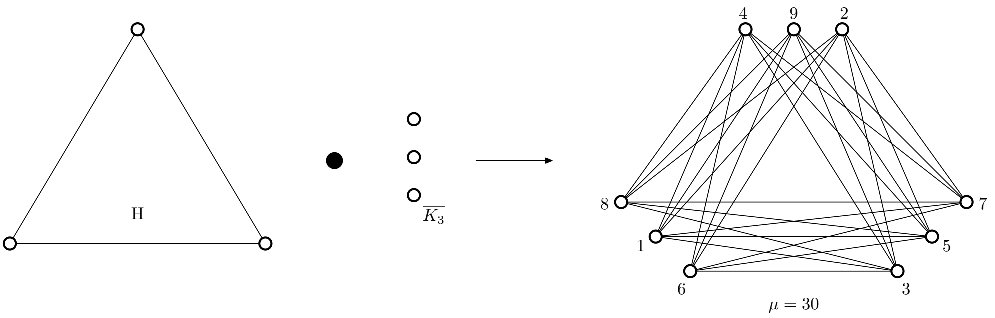
Věta 5.5 *[8] Mějme libovolný s-pravidelný graf H na lichém počtu vrcholů a liché číslo l. Potom s je sudé a graf* $H[\overline{K_l}]$ *má 1-VMV ohodnocení.*

Z důkazu věty 5.5 v článku [8] je patrné, jak konstrukce 1-VMV ohodnocení grafu $H[\overline{K_l}]$ *probíhá. Vzhledem k tomu, že graf H je pravidelný, je v kompozici grafů* $H[\overline{K_l}]$ *každý vrchol spojen se stejným počtem kopií vrcholů grafu* $\overline{K_l}$. *Zajistíme-li, aby byl součet hodnot vrcholů u všech těchto kopií stejný, bude potom i váha všech vrcholů v grafu stejná. K tomu se v článku [8] využívá existence magických obdelníků MR(*a, b*).*

Definice 5.1 *[8]* Magický obdelník *MR(*a, b*) je matice o* a *řádcích a* b *sloupcích, kde* $a, b > 1$, *ve které je prvních* ab *přirozených čísel rozmístěno tak, že součet čísel v každém sloupci MR(*a, b*) je* $\sigma(a, b) = \frac{a(ab+1)}{2}$, *a součet čísel v každém řádku je* $\tau(a, b) = \frac{b(ab+1)}{2}$.

Věta 5.6 *[7] Magický obdelník* $MR(a, b)$ *existuje tehdy a jen tehdy, pokud* $a \equiv b \pmod 2$ *kromě případu* $a = b = 2$.

Použijeme-li k ohodnocení kopií vrcholů grafu $\overline{K_l}$ *hodnoty z jednotlivých sloupců magického obdelníku, bude součet hodnot vrcholů ve všech kopiích stejný. Pro 1-VMV ohodnocení grafu* $H[\overline{K_l}]$, *kde l je liché a H je libovolný pravidelný graf na lichém počtu vrcholů* k, *použijeme magický obdelník MR(*l, k*).*



Obrázek 16: 1VMV ohodnocení kompozice grafu $K_3[\overline{K_3}]$

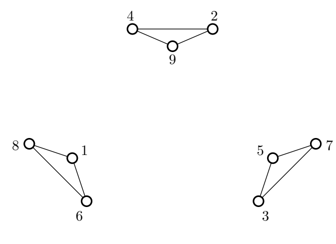
Nechť k značí počet vrcholů grafu H, a je podle předpokladů liché. Důsledek věty 5.5 je, že pokud existuje s-pravidelný graf na k vrcholech, který existuje vždy, když s je sudé, viz věta 3.1 a menší nebo rovno než $k-1$, potom existuje sl-pravidelný graf na kl vrcholech, který má 1-VMV ohodnocení. Tento důsledek věty 5.5 přeformulujeme do věty 5.7, kterou budeme později potřebovat.

Věta 5.7 *Mějme dvě libovolná lichá čísla k, l a sudé číslo s, takové, že $k, l \geq 3$ a $s \geq 2$. Nechť $n = kl$, $r = sl$ a $n \geq r + l$, potom existuje 1-VMV r-pravidelný graf na n vrcholech.*

Podmínka $n \geq r + l$ plyne z požadavku $k - 1 \geq s$ pro existenci s-pravidelného grafu řádu k. Přičteme-li k oběma stranám nerovnice 1 dostaneme $k \geq s + 1$ a po kompozici $H[\overline{K_l}]$ se stupeň každého vrcholu zvýší l-krát a dostaneme podmínku $kl \geq sl + l$.

Věta 5.7 (resp. 5.5) tedy dává postačující podmínky pro existenci 1-VMV ohodnocení r-pravidelného grafu na n vrcholech.

Také zde platí, že výsledky mohou být použity pro sestavení vyrovnaného neúplného turnaje EIT(n, r) a turnaj FIT(n, n-1-r) sestavíme podle doplňku 1-VMV grafu. 1-VMV graf z obrázku 16 odpovídá EIT(9, 6), a jeho doplněk na obrázku 17 odpovídá FIT(9, 2).



Obrázek 17: Doplněk grafu z obrázku 16 reprezentující FIT(9, 2)

Je vidět, že tuto konstrukci 1-VMV ohodnocení je možné použít pouze pro grafy, které lze získat jako kompozice jiných grafů. Grafy na n vrcholech, kde n je prvočíslo takto ohodnotit nelze, neboť množinu vrcholů nelze rozdělit na části se stejným počtem vrcholů. My se tento problém pokusíme v následující kapitole vyřešit.

6 Nové výsledky

V této kapitole se podíváme na nové výsledky a ukážeme si novou konstrukci 1-VMV ohodnocení. Zaměříme se výhradně na pravidelné grafy lichých řádů, jelikož úplná klasifikace pravidelných grafů sudých řádů vzhledem k existenci 1-VMV ohodnocení byla podána v článku [5].

6.1 1-VMV ohodnocení grafů lichých řádů

Podívejme se nyní, jaké vyrovnané neúplné turnaje dokážeme najít, zaměříme-li se pouze na počet hráčů a nikoliv na počet her. Podle definic, které jsme zavedli, to znamená, že hledáme EIT(n, r) pro pevně zadané n a libovolné vhodné r. Libovolným vhodným r *myslíme, že na parametr* r *nebudeme mít žádné požadavky, v celé kapitole však nebudeme brát v úvahu triviální možnost* $r = 0$.

Je-li počet hráčů sudý, existuje podle Věty 5.4 1-VMV r-pravidelný graf na n vrcholech, který reprezentuje turnaj, tehdy a jen tehdy, je-li r sudé číslo (Věta 5.3) ostře menší než n a současně je n nebo r dělitelné 4 beze zbytku. Takovýto graf navíc dokážeme zkonstruovat [5]. A naopak, není-li n nebo r dělitelné 4 beze zbytku, $n \equiv r \equiv 2 \pmod 4$ *tak víme, že takový 1-VMV graf neexistuje. Máme-li tedy nalézt EIT(n, r) se zadanými parametry n a r, kde n je sudé, potom buď umíme příslušný 1-VMV graf zkonstruovat nebo vyvrátit jeho existenci.*

Je-li počet hráčů lichý, existuje podle věty 5.7 1-VMV r-pravidelný graf, který reprezentuje turnaj n hráčů, je-li $n = kl$ *kde* $k, l \geq 3$ *a současně* $r = sl$*, kde* $s \equiv 0 \pmod 2$ *a* $s < k$*. Jsou-li splněny tyto podmínky, dokážeme příslušný graf zkonstruovat [8]. Máme-li nalézt EIT(n, r) se zadaným parametrem n, kde n je liché, potom dokážeme příslušný 1-VMV graf zkonstruovat pro nějaké námi vhodně zvolené r jen tehdy, pokud n není prvočíslo. Vhodně zvolené* r *se myslí číslo různé od nuly neuvažujeme-li triviální případ* $n = 1$*. My se teď budeme zabývat tím, jak nalézt 1-VMV ohodnocení pro* r*-pravidelné grafy na* n *vrcholech, kde je buď* n *prvočíslo nebo máme zadáno* n, r *tak, že nesplňují podmínky věty 5.7. Za těchto okolností zatím neumíme 1-VMV graf zkonstruovat, ani nedokážeme rozhodnout o jeho existenci. My nyní pro některé takové parametry* n *a* r *dokážeme existenci 1-VMV grafu a ukážeme jeho konstrukci.*

Naše konstrukce vychází z myšlenky rozdělit celkový počet lichých vrcholů n*, grafu G na dvě části tak, že jedna část bude obsahovat* o *vrcholů a druhá* m *vrcholů, kde* o *je sudé a* m *liché číslo a samozřejmě platí* $n = o + m$*. Budou-li parametry* o, m *splňovat určité předpoklady, bude možné nalézt 1-VMV ohodnocení grafu G vhodným zkombinováním některých již známých konstrukcí ohodnocení grafů. Výsledný graf sice nebude souvislý a stupeň vrcholů bude omezen, přesto však najdeme konstrukci pro některé hodnoty parametrů* n *a* r*, pro které existence 1-VMV ohodnocení grafu nebyla známa.*

Věta 6.1 *Máme dáno n a r, potom najdeme 1-VMV r-pravidelný graf na n vrcholech, pokud existuje r-pravidelný graf na m vrcholech, a platí $m = kl \equiv 1 \pmod 2$, kde $k, l > 1$ a $r = sl$, kde $s \leq k - 1$ a současně $n - m \geq r + 2$ a buď $r \equiv 0 \pmod 4$ nebo $n - m \equiv 0 \pmod 4$.*

Formulace věty 6.1 je komplikovaná, protože pro konstrukci je nutno rozdělit množinu vrcholů na části tak, aby na každé části bylo možné sestavit graf splňující podmínky 1-VMV ohodnocení.

Důkaz. *Podle podmínek věty zjistíme vztah mezi parametry n a r. Nerovnost $s \leq k - 1$ dosadíme do rovnice $r = sl$ a získáme $r \leq (k-1)l$ a po roznásobení $r \leq kl-l$. To můžeme, díky rovnosti $m = kl$, zapsat jako $r \leq m - l$. Po přičtení l k oběma stranám nerovnice dostaneme $m \geq r + l$. Podmínku na počet vrcholů druhé části $n - m \geq r + 2$ upravíme do tvaru $n \geq m + r + 2$. Z těchto nerovností potom dostaneme vztah $n \geq r + l + r + 2$, který platí při splnění podmínek věty.*

Pro dané n a m označme rozdíl $n - m$ jako o, a bude platit $n = m + o$. Jsou-li splněny podmínky věty, potom $n \geq 2r + l + 2$ a je možno rozdělit množinu vrcholů hledaného 1-VMV grafu na dvě části, z nichž jedna obsahuje m a druhá o vrcholů tak, že nad každou z těchto částí můžeme sestavit samostatný 1-VMV graf. Podmínky $n-m = o \geq r+2$ a buď $r \equiv 0 \pmod 4$ nebo $o \equiv 0 \pmod 4$ zaručí, že bude možné podle věty 5.4 zkonstruovat 1-VMV graf O nad množinou o vrcholů. Zbylé podmínky $m = kl \equiv 1 \pmod 2$, kde $k, l > 1$ a $r = sl$, kde $s \leq k - 1$, zase zaručí, že bude možné podle věty 5.5 zkonstruovat 1-VMV graf M nad množinou m vrcholů.

Konstrukce 1-VMV r-pravidelného grafu s ohodnocením f na sudém počtu vrcholů o je založena na rozkladu hodnot vrcholů na dvouprvkové množiny $a_i b_j$ se stejným součtem, z nichž je vždy jedna hodnota $f(a) = i$, kde $i \in \{1, 2, \ldots, \frac{o}{2}\}$ a druhá $f(b) = j = o+1-i$. Každý vrchol z 1-VMV grafu O je spojen s právě $\frac{r}{2}$ dvojicemi vrcholů s hodnotami a_i, b_j, kde součet hodnot každé dvojice je roven konstantě $\varsigma(a_i b_j) = i + j = i + o + 1 - i = o + 1$. Přičteme-li ke všem hodnotám $f(b)$ nějakou konstantu φ a hodnoty $f(a)$ ponecháme beze změn, dostaneme $f(b) = j + \varphi = o + 1 - i + \varphi$ a součet každé dvouprvkové množiny $a_i b_j$ bude $\varsigma_\varphi(a_i b_j) = i+j+\varphi = i+o+1-i+\varphi = o+1+\varphi$. Součet každé dvouprvkové množiny $a_i b_j$ tedy zůstane navzájem stejný. Změní se ovšem množina hodnot vrcholů v grafu O, hodnoty $\{1, 2, \ldots, \frac{o}{2}\}$ zůstanou beze změn, ale hodnoty $\{\frac{o}{2} + 1, \frac{o}{2} + 2, \ldots, o\}$ budou zvětšeny o φ. Takový to upravený ohodnocený graf označíme $\tilde{O}$. Vlnovka v označení grafu reprezentuje změnu ohodnocení grafu O oproti množině vrcholů a hran, které zůstávají stejné. Množina hodnot vrcholů v grafu $\tilde{O}$ bude $\{1, 2, \ldots, \frac{o}{2}, \frac{o}{2}+1+\varphi, \frac{o}{2}+2+\varphi, \ldots, o+\varphi\}$. Posloupnost přirozených čísel s diferencí 1, tzn. $\{1, 2, \ldots, o + \varphi\}$ obsahuje hodnoty vrcholů grafu $\tilde{O}$, kde čísla $\{\frac{o}{2} + 1, \frac{o}{2} + 2, \ldots, \frac{o}{2} + \varphi\}$ nejsou využita, tato čísla využijeme pro hodnoty grafu $\tilde{M}$, který vznikne přičtením konstanty $\frac{o}{2}$ ke všem hodnotám vrcholů 1-VMV grafu M. Váha každého vrcholu grafu M se proto zvýší o $\frac{r\,o}{2}$ a množina hodnot vrcholů v grafu $\tilde{M}$ bude číselná posloupnost $\{\frac{o}{2} + 1, \frac{o}{2} + 2, \ldots, \frac{o}{2} + m\}$.

Zvolíme-li $\varphi = m$ bude možno grafy $\tilde{O}$ a $\tilde{M}$ sjednotit tak, že sjednocení množin hodnot vrcholů obou grafů bude právě posloupnost $1, 2, \ldots, o + m = n$ a průnik množin hodnot vrcholů obou grafů bude prázdný.

Nyní již stačí dokázat, že váhy vrcholů ohodnocených grafů $\tilde{O}$ a $\tilde{M}$ jsou stejné.

(i) *Magická konstanta grafu na sudém počtu vrcholů s posunutím horní poloviny hodnot.* *V grafu O je každý vrchol spojen s $\frac{r}{2}$ dvojicemi vrcholů, kde součet hodnot vrcholů v dvojici je vždy $(o + 1)$. Magická konstanta grafu O je tedy*

$$\mu(O) = \frac{r(o+1)}{2},$$

což odpovídá vzorci pro výpočet magické konstanty pravidelného grafu z věty 5.1. Po posunutí horních hodnot o parametr m se ke všem vrcholům grafu O s hodnotou $\frac{o}{2} + 1, \frac{o}{2} + 1, \ldots, o$ přičte hodnota parametru m. Podle konstrukce grafu O [5] bude v každé dvojici takovýto vrchol právě jeden. Váha každého vrcholu se proto zvedne o m za každou dvojici vrcholů se kterou je spojen hranami a těch je $\frac{r}{2}$. V grafu O bude tedy i po posunutí horní poloviny hodnot vzájemná váha všech vrcholů stejná. Magická konstanta grafu $\tilde{O}$ je tedy

$$\mu(\tilde{O}) = \frac{r(o+1)}{2} + \frac{rm}{2} = \frac{ro+r}{2} + \frac{rm}{2} = \frac{rm+ro+r}{2} = \frac{r(m+o+1)}{2}$$

(ii) *Magická konstanta grafu na lichém počtu vrcholů s posunutím hodnot.* *Důkaz věty 5.5 ve článku [8] využívá ke konstrukci 1-VMV grafu existenci magických obdelníků (*magic rectangle*) MR(k, l) a jejich vlastnosti vzužívá k výpočtu magické konstanty*

$$\mu(M) = \frac{sl(kl+1)}{2} = \frac{r(m+1)}{2}.$$

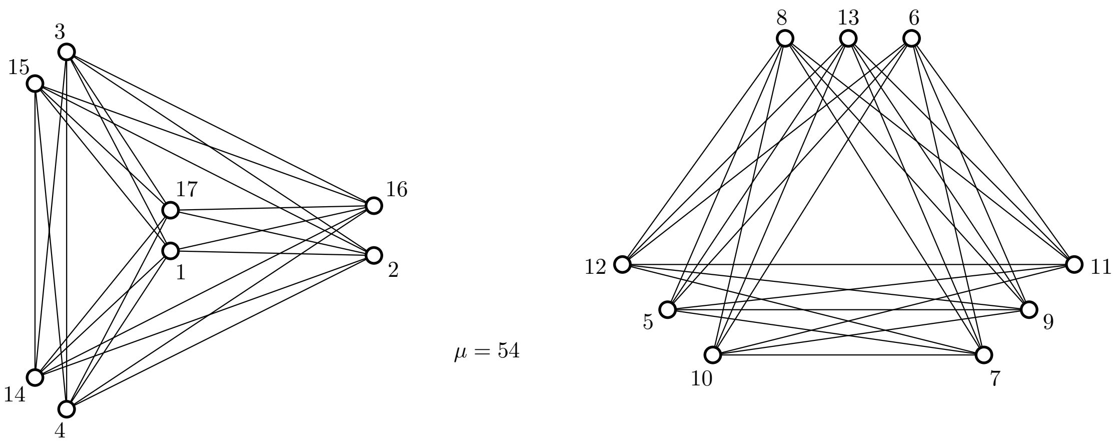
Tento vzorec rovněž dává věta 5.1. Jelikož graf M je r-pravidelný, připočteme-li k hodnotě každého vrcholu nějakou konstantu ω, potom se váha každého vrcholu zvedne o $r\omega$ a rovnost vah vrcholů zůstane neporušena. V našem případě zvýšíme hodnoty všech vrcholů grafu M o $\omega = \frac{o}{2}$, takže magická konstanta grafu $\tilde{M}$ bude

$$\mu(\tilde{M}) = \frac{r(m+1)}{2} + r\omega = \frac{rm+r}{2} + \frac{ro}{2} = \frac{rm+ro+r}{2} = \frac{r(m+o+1)}{2}.$$

Magické konstanty obou grafů se rovnají $\frac{r(m+o+1)}{2} = \frac{r(n+1)}{2}$ a tudíž sjednocení množin vrcholů, hran a hodnot grafů $\tilde{O}$ a $\tilde{M}$ je 1-VMV r-pravidelný graf na n vrcholech. ■

Důkaz současně popisuje, jak konstrukci případného 1-VMV grafu provést. Velké množství podmínek ve Větě 6.1 způsobuje určité omezení, pro použití konstrukce 1-VMV ohodnocení uvedené v důkazu. Podmínky $k, l > 1$ a současně liché znamená $k, l \geq 3$ a proto nejnižší možná hodnota čísla $m = kl$ je 9. Při této volbě čísla m se značně omezí volba parametru r. Parametr r v tomto případě, podle podmínky $r = sl = s3$, kde $s \leq k - 1 = 2$, vyjde buďto 3 nebo 6 a požadavkem existence r-pravidelného grafu na m vrcholech, kde m je liché, je pak jeho hodnota omezena jen na číslo 6. A jelikož počet vrcholů o musí být větší než r a současně sudý, minimální hodnota o je proto 8. Nejmenší počet vrcholů n, pro který lze konstrukci 1-VMV ohodnocení použít, je roven číslu $n = o + m = 8 + 9 = 17$. Pro uvedené parametry $n = 17$ a $r = 6$ je možné 1-VMV ohodnocení 6-pravidelného grafu na 17 vrcholech zkonstruovat a tento případ je uveden na obrázku 18.

Podle doposud známých výsledků nebylo možno nalézt 1-VMV ohodnocení r-pravidelného grafu na n vrcholech, pokud n bylo prvočíslo nebo největší společný dělitel n a r byl 1. Pro 1-VMV ohodnocení pravidelného grafu na 17 vrcholech tedy nebyla zatím žádná konstrukce 1-VMV ohodnocení známa. Upozorněme, že podmínky věty 6.1 jsou podmínky postačující, a 1-VMV ohodnocení pro graf, který všem podmínkám nevyhovuje, může existovat.



Obrázek 18: Použití konstrukce 1-VMV ohodnocení z důkazu věty 6.1 na 6-pravidelném grafu řádu 17

6.2 1-VMVL $(n-1)$-pravidelných a 2-pravidelných grafů

V podkapitole 6.1 jsme se zabývali hledáním 1-VMV ohodnocení r-pravidelných grafů na n vrcholech, kde jsme konstrukci 1-VMV ohodnocení zkoumali z hlediska počtu vrcholů n a na parametr r jsme neměli žádné požadavky. Ve výsledku jsme potom stanovili kritéria existence 1-VMV ohodnocení a uvedli omezení pro parametr r.

V této podkapitole bude přístup opačný. Budeme hledat 1-VMV ohodnocení r-pravidelných grafů na libovolném počtu vrcholů n, ale s pevně zadaným parametrem r a ukážeme pro jakou volbu parametru n 1-VMV ohodnocení existuje. Konkrétně se budeme zabývat mezními hodnotami parametru r, a to nejvyšší možnou $(n-1)$ a nejnižší 2. Případem 1-pravidelných grafů se zabývat nebudeme, jelikož podle věty 5.3 žádný r-pravidelný graf, kde r je liché, nemá 1-VMV ohodnocení. V případě, kdy $r = 0$, sice r-pravidelný graf G na libovolném počtu vrcholů 1-VMV ohodnocení f má, ale vzhledem k tomu, že množina všech sousedních vrcholů $N(x)$ je pro každý vrchol x grafu G prázná, tudíž je váha každého vrcholu rovna 0, nezávisle na ohodnocení f, není tento triviální případ nijak zajímavý.

V případě $(n-1)$-pravidelných grafů je každý vrchol grafu sousední se všemi ostatními vrcholy. Každý $(n-1)$-pravidelný graf je kompletní graf. Viz definice 3.9.

Věta 6.2 *Žádný kompletní graf K_n, kromě triviálního grafu K_1, nemá 1-VMV ohodnocení.*

Důkaz. *Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že kompletní graf K_n, kde $n > 1$, má 1-VMV ohodnocení f. Potom podle definice 3.15 existuje pro každý vrchol x grafu K_n stejná konstanta μ, která se rovná součtu hodnot všech sousedních vrcholů vrcholu x. Váha každého vrcholu x v grafu K_n je dána součtem hodnot všech sousedních vrcholů vrcholu x, což jsou v kompletním grafu všechny vrcholy kromě vrcholu x. Váha libovolného vrcholu x v kompletním grafu K_n tedy bude*

$$w_f(x) = \mu = \sum_{v \in V(K_n)} f(v) - f(x) = \frac{n\,(n+1)}{2} - f(x).$$

Podle definice 3.15 musí být při 1-VMV ohodnocení konstanta μ stejná pro všechny vrcholy v grafu. Toho lze, podle výše uvedeného vzorce pro výpočet váhy libovolného vrcholu x grafu K_n, dosáhnout pouze tehdy, budou-li všechny vrcholy v kompletním grafu ohodnoceny stejným číslem. To by ale bylo v rozporu s definicí 1-VMV ohodnocení uvedené na straně 12. Proto žádné takové 1-VMV ohodnocení kompletního grafu neexistuje.

Triviální graf je graf tvořen jen jedním vrcholem. Tento vrchol můžeme ohodnotit číslem 1 a váha vrcholu bude 0. ∎

Ač lze pro triviální graf ohodnocení nalézt, jedná se o 0-pravidelné řešení, které jak jsme si řekli není příliš zajímavé. Pro kompletní grafy na 2 a více vrcholech již žádné 1-VMV ohodnocení nenalezneme.

Podívejme se nyní jak bude vypadat 1-VMV ohodnocení 2-pravidelných grafů.

Věta 6.3 *Žádný 2-pravidelný graf, kromě grafů tvořených g cykly délky 4, gC_4, kde g je přirozené číslo, nemá 1-VMV ohodnocení.*

Důkaz. *Každý 2-pravidelný graf má alespoň 3 vrcholy, jinak by nemohl být 2-pravidelný. Vezměme libovolný 2-pravidelný graf G a jeden z jeho vrcholů označme jako vrchol x, který bude mít, vzhledem k 2-pravidelnosti grafu, právě dva sousední vrcholy, které označíme y a z. Nyní budeme předpokládat, že 1-VMV ohodnocení f grafu G existuje, a podle definice 3.15 existuje pro každý vrchol x grafu G stejná konstanta μ, která se rovná součtu hodnot obou sousedních vrcholů vrcholu x.*

$$w_f(x) = \mu = f(y) + f(z)$$

Váha vrcholu y, která musí být také rovna konstantě μ, je dána hodnotou sousedního vrcholu x a hodnotou druhého sousedního vrcholu, který označíme písmenem a.

$$w_f(y) = \mu = f(x) + f(a)$$

Váha vrcholu z, která je taktéž rovna konstantě μ, je dána hodnotou sousedního vrcholu x a hodnotou druhého sousedního vrcholu, který označíme písmenem b.

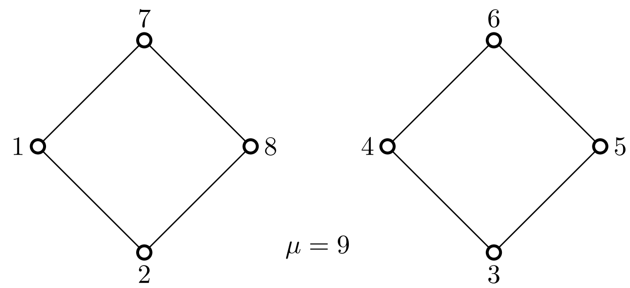
$$w_f(z) = \mu = f(x) + f(b)$$

Podíváme-li se nyní na hodnoty vrcholů a a b,

$$\begin{aligned} f(a) &= \mu - f(x) \\ f(b) &= \mu - f(x), \end{aligned}$$

zjistíme, že jsou shodné. Pokud by se jednalo o různé vrcholy, bylo by to v přímém rozporu s definicí 1-VMV ohodnocení. Musí tedy jít o případ $a = b$, kde vrchol a má sousední vrcholy y a z. Vrcholy x, y, z, a tvoří cyklus délky 4. Toto platí pro libovolné vrcholy x, y, z grafu G, proto je graf G složen pouze z cyklů C_4. ■

Z důkazu věty 6.3 plyne, že nutná podmínka, nikoliv však postačující, pro existenci 1-VMV ohodnocení 2-pravidelného grafu na n vrcholech je $n \equiv 0 \pmod 4$. Věta 5.4 na straně 18 dává postačující podmínky pro existenci 1-VMV ohodnocení grafů na sudém počtu vrcholů [5]. Graf gC_4, kde g je přirozené číslo, podmínky věty 5.4 splňuje. Příklad 1-VMV ohodnocení grafu C_4 je možné najít v úvodu na stránce 3, příklad ohodnocení grafu $2\ C_4$ je na obrázku 19.



Obrázek 19: 1-VMV ohodnocení grafu $2\ C_4$

7 Závěr

Tato bakalářská práce shrnuje známé výsledky z oblasti 1-vrcholově magických vrcholových ohodnocení pravidelných grafů a rozšiřuje je o nové poznatky, umožňující nalezení 1-VMV ohodnocení pro grafy, pro které doposud žádná konstrukce 1-VMV ohodnocení nebyla známa.

V práci jsme nejdříve nastínili reálný problém spravedlivých neúplných turnajů a objasnili jak souvisí s tématem práce. Poté jsme probrali potřebné základní teoretické poznatky týkající se grafů a jejich ohodnocení. V kapitole 4 jsme formalizovali strukturu spravedlivých neúplných turnajů a uvedli definice a věty umožnující pro hledání spravedlivého neúplného turnaje použít 1-VMV ohodnocení pravidelného grafu. Následně jsme se již věnovali právě 1-VMV ohodnocení pravidelných grafů. Nejprve jsme probrali a přehledně rozdělili známé výsledky, z nich jsme potom vycházeli a čerpali při další práci. Nejvýznamnější část práce je uvedena v kapitole 6, v jejíž první části je konstruktivní důkaz 1-VMV ohodnocení, použitelné i pro některé grafy, jejichž parametry jsou pro jiné konstrukce příliš limitující. Toto bylo hlavním cílem celé práce.

V textu jsme se často odkazovali na spravedlivý neúplný turnaj, který jsme v úvodu uvedli jako motivační problém této práce, na závěr by tedy bylo vhodné uvést nějaký příklad. Předpokládejme, že chceme pořádat předkolo fotbalové ligy, kterého se bude účastnit 17 týmů, a že na odehrání všech $\frac{17 \cdot 16}{2} = 136$ *vzájemných utkání nebudeme mít čas. Dejme tomu, že bude možno odehrát dvě třetiny her. Otázka je, jak nyní vybrat vzájemné zápasy tak, aby si nikdo nemohl stěžovat, že byl výběrem soupeřů znevýhodněn oproti jinému týmu. Nejprve si položíme otázku, zda takový výběr her, který by nikoho neznevýhodňoval, vůbec existuje. Pokud existovat má, tak musí také existovat výběr her, který bude odpovídat vyrovnanému neúplnému turnaji 17 hráčů, tak jak jsme ho zavedli v kapitole 4, který lze reprezentovat 1-VMV pravidelným grafem G na 17 vrcholech. Takový graf jsme už ale našli, a je zobrazen v obrázku 18 na straně 25, proto o existenci spravedlivého neúplného turnaje 17 hráčů nemůže být pochyb. Podle znalostí z kapitoly 4, graf, který tento spravedlivý neúplný turnaj bude reprezentovat, získáme jako doplněk grafu G. Obrázek tohoto doplňku je značně nepřehledný a není zde uveden, nicméně z obrázku 18 a definice 3.5 doplňku grafu na straně 8 si uděláme jasnou představu, jak bude spravedlivý neúplný turnaj reprezentovaný tímto doplňkem vypadat a které týmy se vzájemně utkají. Vzhledem k tomu, že nalezený 1-VMV graf G je* 6*-pravidelný graf na* 17 *vrcholech, jeho doplněk podle definice 3.5 bude* 10*-pravidelný graf na* 17 *vrcholech. Spravedlivý neúplný turnaj, který z tohoto doplňku získáme, bude FIT(17, 10) s celkovým počtem her* $\frac{17 \cdot 10}{2} = 85$*, což vyhovuje námi zadané podmínce snížit celkový počet utkání alespoň o třetinu.*

Hlavní přínos práce spatřuji v nalezení nové konstrukce 1-VMV ohodnocení pravidelných grafů, kterou jsme zde prezentovali pro nalezení 1-VMV ohodnocení pravidelného grafu na 17 *vrcholech. S kritickým pohledem na tuto konstrukci však dodávám, že podmínky omezující pravidelnost hledaného 1-VMV grafu nejsou zanedbatelné, a přizná-*

vám, že stále existují grafy s takovými parametry, které nedovolují aplikaci nalezené konstrukce, a možnosti pro případný další výzkum jsou otevřené.

8 Literatura

[1] P. Kovář, *On Magic Graph Labelings, Ph.D. Thesis, VŠB-TUO (2004).*

[2] P. Kovář, *Magic labelings of regular graphs, AKCE Intern. J. Graphs and Combin.* **4** *(2007), 261–275.*

[3] J. A. Gallian, *A dynamic survey of graph labeling, The Electronic Journal of Combinatorics,* **DS 6** *(2009).*

[4] M. Miller, C. Rodger, R. Simanjuntak, *Distance magic labelings of graphs, Australasian Journal of Combinatorics, Volume* **28** *(2003), 305–315.*

[5] D. Frončk, P. Kovář, T. Kovářová, *Fair incomplete tournaments, Annual proceedings of Science and Technology at VŠB - TUO 2007, 41–43.*

[6] D. Frončk, *Fair incomplete tournaments with odd number of teams and large number of games, Congr. Numer.* **187** *(2007), 83–89.*

[7] T. R. Hagedorn, *Magic rectangles revisited, Discrete Math.* **207** *(1999), 65–72.*

[8] D. Frončk, P. Kovář, T. Kovářová, *Constructing distance magic graphs from regular graphs, preprint.*

[9] K. A. Sugeng, D. Frončk, M. Miller, J. Ryan, J. Walker, *On distance magic labelings of graphs, preprint.*

[10] S. Arumugam *et al.* , *Distance magic graphs, manuscript.*